לוגיקה מתמטית (1) – תרגיל 13

1.

א. נאמר שפונקציה n-מקומית מלאה (כלומר פונקציה המוגדרת עבור כל n-יה של מחרוזות) היא חשיבה אם יש אלגוריתם המחשב אותה. תארו בקצרה אלגוריתמים המחשבים את הפונקציות הבאות:

i) בהינתן n מחרוזות $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, $J(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ הוא השרשור שלהן.

ii) בהינתן מחרוזת ψ,

$$\pi(\psi,i)=\begin{cases}\varphi_i & \varphi_i \text{ בשרשור הוא } i-\text{ה } \text{מחרוזות והאיבר } \psi \text{ היא שרשור של } i<n \\ \langle\ \rangle & \text{אחרת}\end{cases}.$$

ב. הראו שאם $R(x)$ יחס כריע ו-f פונקציה חשיבה אזי גם היחס $R(f(x_1,\ldots,x_n))$ כריע.

ג. יהיו S_1,S_2 יחסים כריעים חיובית. הוכיחו כי גם $S_1\cap S_2$ כריע חיובית.

ד. תהי T תורה כריעה (כלומר, T היא קבוצה עקבית של פסוקים כך שאוסף המחרוזות ב-T הוא קבוצה כריעה). הוכיחו שאוסף המסקנות הלוגיות של T (כלומר $\{\varphi : T\models\varphi\}$) כריעה חיובית. רמזים

i) הראו שאם T סופית יש יחס עדות כריע R כך ש- $\exists xR_T(x,\varphi)$ אמם $T\models\varphi$.

ii) הראו שהיחס $R_T(x,z)$ האומר: "z היא זוג מחרוזות (z_1,z_2) כך ש-z_1 קבוצה סופית של מחרוזות מ-T ו-z_2 עד לכך ש-x הוא מסקנה לוגית של z_1" הוא יחס כריע.

iii) השתמשו במשפט הקומפקטיות כדי להראות שהיחס $\exists zR(x,z)$ הוא יחס העדות המבוקש.

ה. (רשות) הראו שאם T תורה כריעה חיובית אז קבוצת המסקנות הלוגיות של T כריעה חיובית.

ו. (רשות) פונקציה מלאה f תקרא כריעה אם היחס $(x,f(x))$ הוא יחס כריע. הראו שפונקציה מלאה f היא חשיבה אמם היא כריעה. רמז: החלק הקשה הוא להראות ש-f כריעה גורר ש-f חשיבה. בהנתן x נסו לבדוק את כל האפשרויות ל-$f(x)$. הראו שהבדיקה הנדרשת תארך זמן סופי (לשם כך השתמשו בעובדה ש-f שלמה).

2. נאמר שיחס R (פונקציה F) **אדיש(ה)** ליחס הדו-מקומי E אם

$$\forall x_1,\ldots,\forall x_n\forall y_1,\ldots,\forall y_n\Big(\bigwedge_{i=1\ldots n}E(x_i,y_i)\to\big(R(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow R(y_1,\ldots,y_n)\big)\Big)$$

ו-

$$\forall x_1,\ldots,\forall x_n\forall y_1,\ldots,\forall y_n\Big(\bigwedge_{i=1\ldots n}E(x_i,y_i)\to E\big(F(x_1,\ldots,x_n),F(y_1,\ldots,y_n)\big)\Big)$$

בהתאמה.

א. האם הפונקציות $+,\cdot$ אדישות ליחס השוויון מודולו 3.

ב. האם מי מן היחסים $<$, ושוויון מודולו 6 אדיש עבור היחס שוויון מודולו 3.

ג. האם היחס השוויון מודולו 3 אדיש ליחס השוויון מודולו 6.

3. נניח ש-E יחס חפיפה למבנה A. להשמות s,s' ל-A. הוכיחו שאם לכל x מתקיים $E(s(x),s'(x))$ אז לכל שם עצם t מתקיים $E(val(A,s,t),val(A,s',t))$, ולכל נוסחה $val(A,s,\varphi)=val(A,s',\varphi)$.

4. יחס $<$ על קבוצה I יקרא יחס סדר קווי (או מלא) אם הוא מקיים: $x<y\Leftrightarrow\neg(y<x)$ ו-$x<y\wedge y<z\Rightarrow x<z$. יחס סדר קווי על I יקרא סדר טוב, אם לכל $\phi\neq I'\subseteq I$ יש איבר מזערי.

א. הוכיחו כי יחס הסדר הטבעי על N הוא סדר טוב. הוכיחו כי יחס הסדר הטבעי על Z איננו סדר טוב.

ב. הוכיחו כי $<$ הוא סדר טוב על I אם אין ב-I סדרה אינסופית יורדת.

ג. תהי L שפה לתחשיב היחסים המכילה לפחות את סימן היחס הדו-מקומי $<$ ותהי תורה T ב-L המכילה את אקסיומות הסדר. הראו שאם ל-T יש מודל אינסופי (אחד לפחות) אז יש לה מודל M שבו $<^M$ אינו סדר טוב. הדרכה:

i) הוסיפו לשפה אינסוף קבועים אישיים חדשים.

ii) כתבו קבוצת פסוקים Δ האומרת שהקבועים החדשים מהווים סדרה אינסופית יורדת.

iii) השתמשו בתרגיל 9, שאלה 4 ובמשפט הקומפקטיות כדי להראות ש- $T \cup \Delta$ עקבית.